Lycée Pilote Siliana **Prof : H –Jalloul**	**Série d' exercices**	**Classe 4éme math** **2018 / 2019**

EXERCICE

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2

Soit f_n la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f_n(x)=\dfrac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Etudier les variation de f_n.

b) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_n).

c) Tracer la courbe (C_2).

2/ On pose $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$

Donner une interprétation graphique de U_n. En déduire que $U_n=\frac{\pi}{4}$

3/ Soient les suites (V_n) et (W_n) définies par : $V_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(x)dx$ et $W_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.

a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\frac{1}{1+x}\geq 1-x$ et que $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan x\leq\frac{4}{\pi}x$

b) En déduire que : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $1-\left(\frac{4}{\pi}x\right)^n\leq f_n(x)\leq 1$

c) Montrer que la suite (V_n) converge vers un réel L que l'on précisera . En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

Exercice

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.

b) En déduire S(C).

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.

b) En déduire que S(D) = K.

c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C ,1) et (K , 4).

d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que SoS(A) = E.

e) Construire Ω.

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Exercice

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

A) Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A.

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est égal à 2.

2) Soit C l'image de A par f.

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que $AC = 2AB$.

b) Placer le point C.

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C. On note Ω le centre de g.

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Placer le point Ω.

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$; puis montrer que G est le milieu du segment $[\Omega H]$.

c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

Exercice

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2 .

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F) =K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

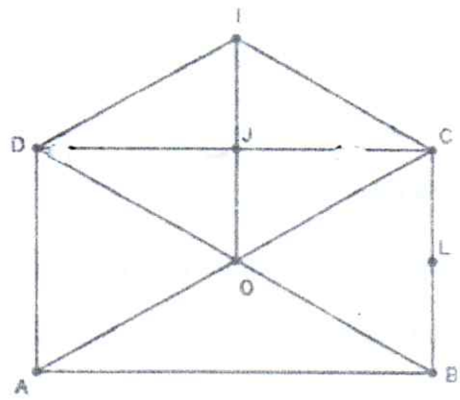
b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice

Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle direct de centre O

AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du segment [CD] et le point L est le milieu du segment [BC].



1) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $R(O)$ et $R(D)$.

b) Montrer que $R(A) = B$.

2) Soit $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}$.

a) Vérifier que $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) Soit h l'homothétie de centre le point C et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $\varphi = R \circ h \circ g^{-1}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Soit K le milieu du segment [IC]. Montrer que $\varphi(B) = K$.

c) Montrer que $\varphi = h \circ S_{(AC)}$.

4) Déterminer l'image par φ du rectangle ABCD.

Exercice

On pose, pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1} x} dx$.

1. (a) Justifier l'existence de I_n.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n - I_{n-1} = J_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Déterminer a et b pour que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1+\sin x} + \frac{b\cos x}{1-\sin x}$. En déduire le calcul de I_0.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)J_n$.

   (On pourra remarquer que $\frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\cos^{2n-1} x}$).

   (b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2}n}$. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+2i)m\,z - (1-i)m^2 = 0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in \left]0,\pi\right[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que (z_1z_2 est un réel strictement positif) si et seulement si $\left(\theta = \frac{5\pi}{8}\right)$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

2) Vérifier que $z_1z_2 = |m|^2\sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2, images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe , $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t ;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] avec l'axe $(O,\vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2 = OB.OC$.

b) En déduire que $|m| = OE$.

4) a) Construire le point A d'affixe m.

b) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

(On convient que $|z_1| < |z_2|$).

ure 2